

## الموضوع الأول

### التمرين الأول :

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة ب:  $u_0 = 1$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = 3u_n + 1$  .

( $v_n$ ) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ب:  $v_n = u_n + \frac{1}{2}$  .

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات ، إجابة واحدة فقط منها صحيحة ، حددها مع التعليل .

1 . المتتالية ( $v_n$ ) :

- أ - حسابية .  
ب - هندسية .  
ج - لا حسابية ولا هندسية .  
2 . نهاية المتتالية ( $u_n$ ) هي :

- أ -  $+\infty$  .  
ب -  $-\frac{1}{2}$  .  
ج -  $-\infty$  .

3 . نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $S_n = -\frac{1}{2} [1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}]$  .

- أ -  $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$  .  
ب -  $S_n = \frac{1 - 3^n}{4}$  .  
ج -  $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$  .

### التمرين الثاني :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ( $O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ) المستوي ( $p$ ) الذي يشمل

النقطة  $A(1; -2; 1)$  و  $\vec{n}(-2; 1; 5)$  شعاع ناظمي له ، وليكن ( $Q$ ) المستوي ذا المعادلة  $x + 2y - 7 = 0$  .

1 . اكتب معادلة ديكارتية للمستوي ( $p$ ) .

2 . أ - تحقق أن النقطة  $B(-1; 4; -1)$  مشتركة بين المستويين ( $p$ ) و ( $Q$ ) .

ب - بين أن المستويين ( $p$ ) و ( $Q$ ) متقاطعان وفق مستقيم ( $\Delta$ ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له .

3 . لتكن النقطة  $C(5; -2; -1)$  .

أ - احسب المسافة بين النقطة  $C$  والمستوي ( $p$ ) ثم المسافة بين النقطة  $C$  والمستوي ( $Q$ ) .

ب - أثبت أن المستويين ( $p$ ) و ( $Q$ ) متعامدان .

ج- استنتج المسافة بين النقطة  $C$  والمستقيم  $(\Delta)$ .

### التمرين الثالث :

نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  التي لاحتقاتها على الترتيب:  $z_A = -i$ ،  $z_B = 2 + 3i$  و  $z_C = -4 + i$ .

1. أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ .

ب- عين طوليلة العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  وعمدة له، ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

2. نعتبر التحويل النقطي  $T$  في المستوى الذي يرفق بكل نقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$ ،

النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  حيث:  $z' = iz - 1 - i$ .

أ- عين طبيعة التحويل  $T$  محددا عناصره المميزة.

ب- ماهي صورة النقطة  $B$  بالتحويل  $T$ ؟

3. لتكن النقطة  $D$  ذات اللاحقة  $z_D = -6 + 2i$ .

أ- بين أن النقط  $A$ ،  $C$  و  $D$  في استقامية.

ب- عين نسبة التحاكي  $h$  الذي مركزه  $A$  ويحول النقطة  $C$  إلى النقطة  $D$ .

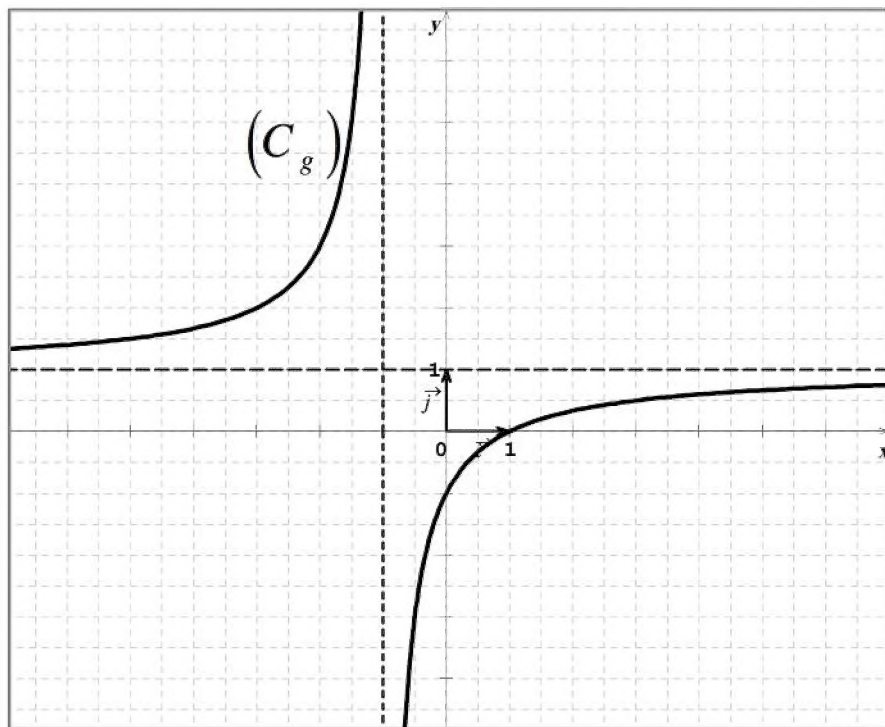
ج- عين العناصر المميزة للتشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $A$  ويحول  $B$  إلى  $D$ .

### التمرين الرابع :

I) نعتبر  $g$  الدالة المعرفة على المجال  $\mathbb{R} - \{-1\}$  ب:  $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$  و  $(C_g)$  تمثيلها

البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  الشكل المقابل،

بقراءة بيانية:





أ- شكل جدول تغيرات الدالة  $g$  .

ب- حل بيانيا المتراجحة  $g(x) > 0$  .

ج- عين بيانيا قيم  $x$  التي من أجلها يكون  $0 < g(x) < 1$

II) لتكن  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$  ب:  $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

1. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  ثم فسر النتيجة هندسيا.

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$  ،  $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$  .

ب- احسب  $f'(x)$  وادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .

3. أ- باستعمال الجزء I) السؤال ج- عين إشارة العبارة  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$  على المجال  $]1; +\infty[$  .

ب-  $\alpha$  عدد حقيقي .

بين أن الدالة  $x \mapsto (x-\alpha) \ln(x-\alpha) - x$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \ln(x-\alpha)$  على المجال  $]1; +\infty[$  .

ج- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$  ،  $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$  ثم عين دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]1; +\infty[$  .

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول :

$\alpha$  عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1 .

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $u_0 = 6$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$u_{n+1} = \alpha u_n + 1$$

$(v_n)$  متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$

1. أ- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\alpha$ .

ب- أكتب بدلالة  $n$  و  $\alpha$  ، عبارة  $v_n$  ثم استنتج بدلالة  $n$  و  $\alpha$  ، عبارة  $u_n$ .

ج- عين قيم العدد الحقيقي  $\alpha$  التي تكون من أجلها المتتالية  $(u_n)$  متقاربة.

$$2. \text{ نضع } \alpha = \frac{3}{2}.$$

- احسب بدلالة  $n$  ، المجموعين  $S_n$  و  $T_n$  حيث :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \text{ و } T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

### التمرين الثاني :

نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  لواحقتها على الترتيب :  $z_A = 3 - 2i$  ،  $z_B = 3 + 2i$  ،  $z_C = 4i$ .

1. أ- علم النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$ .

ب- ما طبيعة الرباعي  $OABC$  ؟ علل إجابتك.

ج- عين لاحقة النقطة  $\Omega$  مركز الرباعي  $OABC$ .

2. عين ثم أنشئ  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوى التي تحقق :

$$\|\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 12$$

3. أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  ، المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية :

$$z^2 - 6z + 13 = 0. \text{ نسمي } z_0 \text{ و } z_1 \text{ حلي هذه المعادلة.}$$

ب- لتكن  $M$  نقطة من المستوى التي تحقق :  $|z - z_0| = |z - z_1|$

### التمرين الثالث :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقط :

$$A(0; 1; 5), B(2; 1; 7), C(3; -3; 6).$$



1. أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(\Delta)$  الذي يشمل النقطة  $B$  و  $\vec{u}(1;-4;-1)$  شعاع توجيه له.

ب- تحقق أن النقطة  $C$  تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta)$ .

ج- بين أن الشعاعين  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{BC}$  متعامدان.

د- استنتج المسافة بين النقطة  $A$  والمستقيم  $(\Delta)$ .

2. نعتبر النقطة  $M(2+t; 1-4t; 7-t)$  حيث  $t$  عدد حقيقي، ولتكن الدالة  $h$  المعرفة

على  $\mathbb{R}$  بـ:  $h(t) = AM$ .

أ- اكتب عبارة  $h(t)$  بدلالة  $t$ .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $t$ ،  $h'(t) = \frac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}}$ .

ج- استنتج قيمة العدد الحقيقي  $t$  التي تكون من أجلها المسافة  $AM$  أصغرها يمكن.

- قارن بين القيمة الصغرى للدالة  $h$ ، والمسافة بين النقطة  $A$  والمستقيم  $(\Delta)$ .

التمرين الرابع:

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = e^x - ex - 1$ .

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. أ- احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

ب- احسب  $f'(x)$  ثم ادرس إشارتها.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

2. أ- بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = -ex - 1$  مقارب للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $(-\infty)$ .

ب- اكتب معادلة للمستقيم  $(T)$  مماس للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة  $0$ .

ج- بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]1, 75; 1, 76[$  حلا وحيدا  $\alpha$ .

د- ارسم المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(T)$  ثم المنحنى  $(C_f)$  في المجال  $]-\infty; 2]$ .

3. أ- احسب بدلالة  $\alpha$ ، المساحة  $A(\alpha)$  للحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  وحامل محور

الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما:  $x = \alpha$  و  $x = 0$ .

ب- أثبت أن:  $A(\alpha) = \left( \frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) ua$  (  $ua$  هي وحدة المساحات )

## حل الموضوع الأول

### التمرين الأول :

1. المتتالية بد  $(v_n)$  هندسية وأساسها 3 لأن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  
 لدينا  $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2}$  ومنه:  $v_{n+1} = 3u_n + 1 + \frac{1}{2}$  ، ومنه  $v_{n+1} = 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right)$  ،  
 أي:  $v_{n+1} = 3v_n$  .  
 2. نهاية المتتالية  $(u_n)$  هي : أ.  $+\infty$  لأن:  
 لدينا  $v_n = v_0 \times 3^n$  وبما أن  $3 > 1$  و  $v_0 = u_0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 0$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$  ،

ولكون:  $u_n = v_n - \frac{1}{2}$  نستنتج أن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  .

3. ج -  $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$  لأن:

$$\begin{aligned} S_n &= -\frac{1}{2} \left[ 1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[ 1 + e^{\ln 3} + e^{\ln 3^2} + e^{\ln 3^3} + \dots + e^{\ln 3^n} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[ 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n \right] \end{aligned}$$

حيث المجموع  $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n$  هو مجموع  $n+1$  حداً للمتتالية هندسية أساسها 3

وحدها الأول 1 ومنه:  $S_n = -\frac{1}{2} \left( \frac{1-3^{n+1}}{1-3} \right) = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

### التمرين الثاني :

1. المستوي  $(p)$  هو مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  بحيث:  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  .

لدينا:  $\vec{n}(-2; 1; 5)$  و  $\overrightarrow{AM}(x-1; y+2; z-1)$  ومنه بعد الحساب والتبسيط نجد:

$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  تكافئ  $(p): -2x + y + 5z - 1 = 0$

2. أ- بتعويض إحداثيات B في معادلة  $(p)$  نجد  $-2(-1) + 4 + 5(-1) - 1 = 0$  محققة

ومنه  $B \in (p)$  ، وبتعويض إحداثيات B في معادلة  $(Q)$  نجد  $-1 + 2(4) - 7 = 0$  محققة



ومنه  $B \in (Q)$ ، إذن  $B$  مشتركة بين  $(p)$  و  $(Q)$ .

ب- لدينا  $\vec{n}(-2;1;5)$  شعاع ناظم للمستوي  $(p)$  و  $\vec{n}'(1;2;0)$  شعاع ناظم

للمستوي  $(Q)$  غير مرتبطين خطيا لأن:  $\frac{1}{-2} \neq \frac{2}{1}$  ومنه  $(p)$  و  $(Q)$  متقاطعان وفق

$$\begin{cases} -2x + y + 5z - 1 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{مستقيم } (\Delta) \text{ تمثيل ديكارتي له:}$$

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 3 \\ z = t \end{cases} \quad \text{وبوضع مثلا } z = t \text{ نستنتج من الجملة الأخيرة الجملة } y = -t + 3 \text{ وهي تمثيل وسيطي}$$

للمستقيم  $(\Delta)$ ، حيث  $t$  وسيط حقيقي.

3. لتكن النقطة  $C(5;-2;-1)$

$$d_1 = d(C; (P)) = \frac{|(-2)5 + (-2) + 5(-1) - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2}} = \frac{18}{\sqrt{30}} \quad \text{أ- لدينا:}$$

$$d_2 = d(C; (Q)) = \frac{|5 + 2(-2) - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \quad \text{ولدينا:}$$

ب- لدينا بالحساب:  $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$  ومنه المستويان  $(p)$  و  $(Q)$  متعامدين.

$$d(C; (\Delta)) = \sqrt{\left(\frac{18}{\sqrt{30}}\right)^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2} \quad \text{ج- لدينا: } d(C; (\Delta)) = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \quad \text{ومنه:}$$

$$d(C; (\Delta)) = \sqrt{18} \quad \text{أي:}$$

التمرين الثالث:

$$1. \text{ أ- لدينا: } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \quad \text{إذن: } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(-4 + 2i)(2 - 4i)}{(2 + 4i)(2 - 4i)} = \frac{20i}{20} = i$$

$$\text{ب- لدينا: } \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = |i| = 1 \quad \text{و } \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

وبما أن:  $\frac{AC}{AB} = 1$  و  $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$  فإن المثلث  $ABC$  قائم ومتساوي الساقين في  $A$ .

2. النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  حيث:  $z' = iz - 1 - i$ .

أ- العبارة المركبة للتحويل  $T$  هي من الشكل  $z' = az + b$ ، حيث  $a = i$  و

$$b = -1 - i$$

بما أن  $a$  مركب غير حقيقي و  $|a|=1$  فإن  $T$  دوران زاويته  $\arg(a) = \frac{\pi}{2}$  ، ومركزه النقطة

ذات اللاحقة  $z_A = -i = \frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{b}{1-a}$  ، ومنه النقطة  $A$  هي مركز الدوران  $T$ .

ب- بما أن:  $AC = AB$  و  $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2}$  فإن صورة النقطة  $B$  بالتحويل  $T$  هي النقطة  $C$ .

$$3. \text{ أ- لدينا: } \frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{-4+2i}{-6+3i} = \frac{2}{3}$$

بما أن  $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$  حقيقي فإن النقط  $A$  ،  $C$  و  $D$  في استقامة.

ب- لتكن  $k$  نسبة التحاكي  $h$  ، لدينا:  $z_D - z_A = k (z_C - z_A)$  ومنه:

$$k = \frac{3}{2} \text{ ، إذن: } k = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{3}{2}$$

ج- لدينا:  $T(B) = C$  و  $h(C) = D$  ومنه:  $h(T(B)) = D$  أي:  $S(B) = D$

وبالتالي نسبة التشابه  $S$  هي نسبة التحاكي  $h$  أي  $\frac{3}{2}$  ، وزاويته هي زاوية الدوران  $T$  أي  $\frac{\pi}{2}$ .

التمرين الرابع:

I) أ- جدول تغيرات الدالة  $g$ :

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	$1 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 1$

ب-  $g(x) > 0$  تكافئ  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$ .

ج-  $0 < g(x) < 1$  تكافئ  $x \in ]1; +\infty[$ .

II) لتكن  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$  ب:  $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$$1. \text{ بما أن } \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow 0} \ln X = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{0^+}{2} = 0^+$$

ومنه:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$



بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$  و  $\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = \ln 1 = 0$  فإن:

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ ومنه: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right) = 0$$

نستنتج أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل المستقيم الذي معادلته  $x = 1$  كمستقيم مقارب بجوار  $-\infty$  ويقبل المستقيم الذي معادلته  $y = 1$  كمستقيم مقارب عند  $+\infty$ .

2. أ- من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$ :

$$\cdot g'(x) = \frac{1 - (-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب- الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق على المجال  $]1; +\infty[$  ولدينا:

$$\cdot f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{\frac{2}{x+1}}{\frac{x-1}{x+1}}$$

بما أن:  $\frac{2}{(x+1)^2} > 0$  و  $\frac{x-1}{x+1} > 0$  على المجال  $]1; +\infty[$  فإن:  $f'(x) > 0$

وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $]1; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$ :

$x$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$1$

ب-  $g(x) > 0$  تكافئ  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$

3. أ- جدول إشارة العبارة  $\ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right)$  على المجال  $]1; +\infty[$ :

$x$	$1$	$+\infty$
$\ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right)$		-

ب- الدالة  $x \mapsto (x - \alpha) \ln(x - \alpha) - x$  تقبل الاشتقاق على المجال  $]1; +\infty[$  كونها عبارة عن مجموع ومركب وجداء دوال قابلة للاشتقاق على المجال  $]1; +\infty[$ ، كما أن

$$x \mapsto 1 \times \ln(x - \alpha) + \cancel{(x - \alpha)} \times \frac{1}{\cancel{(x - \alpha)}} - 1$$

مشتقتها هي الدالة :

$$x \mapsto \ln(x - \alpha)$$

أي الدالة :

ومنه الدالة  $x \mapsto (x - \alpha) \ln(x - \alpha) - x$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \ln(x - \alpha)$  على المجال  $]1; +\infty[$ .

ج- من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$  :

$$1 - \frac{2}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = \frac{x-1}{x+1} = g(x)$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$  :

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x+1} + \ln(x-1) - \ln(x+1)$$

وبالتالي الدالة  $F$  حيث :

$$F(x) = x - 2 \ln(x-1) + [(x-1) \ln(x-1) - x] - [(x+1) \ln(x+1) - x]$$

$$أي : F(x) = x + [(x-1) \ln(x-1)] - [(x+3) \ln(x+1) - x]$$

هي دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]1; +\infty[$ .



## حل الموضوع الثاني

### التمرين الأول :

1. أ- من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا:  $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{\alpha - 1}$  ومنه:

$$v_{n+1} = \alpha u_n + 1 + \frac{1}{\alpha - 1} \text{ ومنه: } v_{n+1} = \alpha u_n + \frac{\alpha}{\alpha - 1} \text{ ومنه:}$$

$v_{n+1} = \alpha \left( u_n + \frac{1}{\alpha - 1} \right)$  أي:  $v_{n+1} = \alpha v_n$ . وهذا معناه أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\alpha$ .

ب-  $v_n = v_0 \times \alpha^n$  حيث  $v_0 = u_0 + \frac{1}{\alpha - 1} = 6 + \frac{1}{\alpha - 1}$  أي:  $v_0 = \frac{6\alpha - 5}{\alpha - 1}$ .

ومنه:  $v_n = \left( \frac{6\alpha - 5}{\alpha - 1} \right) \alpha^n$ .

ولدينا:  $u_n = v_n - \frac{1}{\alpha - 1}$  ومنه:  $u_n = \left( \frac{6\alpha - 5}{\alpha - 1} \right) \alpha^n - \frac{1}{\alpha - 1}$ .

ج- تكون المتتالية  $(u_n)$  متقاربة من أجل  $-1 < \alpha < 1$ .

2. من أجل  $\alpha = \frac{3}{2}$  لدينا  $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 1$  و  $v_n = u_n + \frac{1}{\frac{3}{2} - 1}$ .

لدينا:  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1}$  ، من أجل  $\alpha = \frac{3}{2}$  لدينا  $v_0 = \frac{6 \times \frac{3}{2} - 5}{\frac{3}{2} - 1}$

أي:  $v_0 = 8$  ، ومنه:  $S_n = 8 \times \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1}$  ، أي:  $S_n = 16 \times \left[ \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1 \right]$

لدينا:  $u_n = v_n - 2$  أي:  $u_n = v_n - \frac{1}{\frac{3}{2} - 1} = v_n - \frac{1}{\frac{3}{2} - 1}$

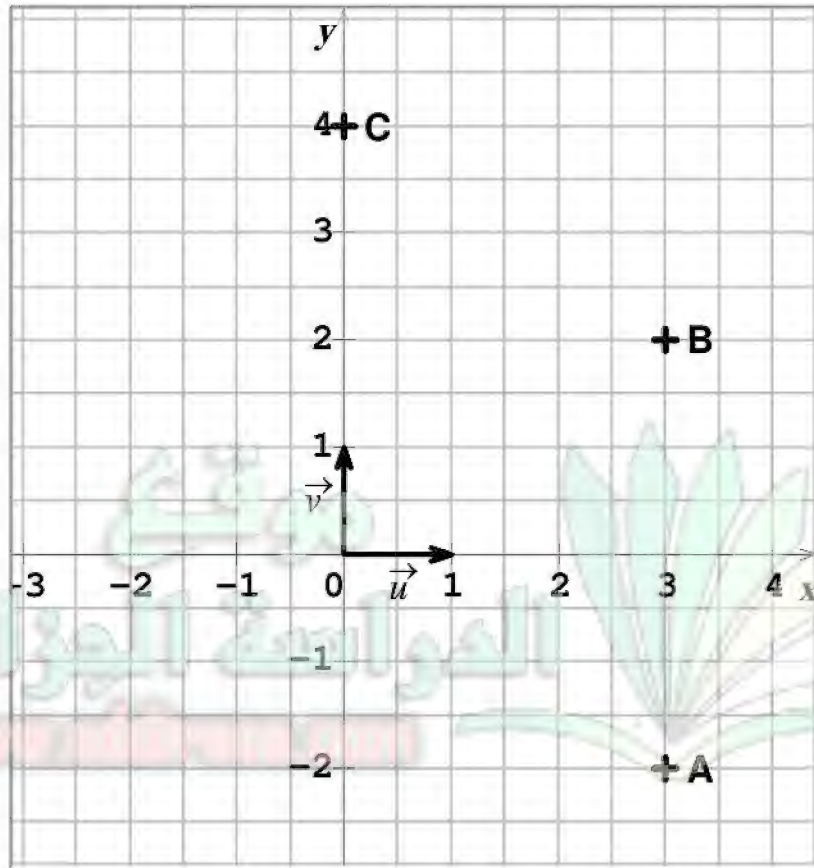
ومنه:  $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 - 2) + (v_1 - 2) + (v_2 - 2) + \dots + (v_n - 2)$

أي:  $T_n = (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + \dots + (-2)$

$$T_n = 16 \times \left[ \left( \frac{3}{2} \right)^{n+1} - 1 \right] - 2(n+1) \text{ ، وبالتالي: } T_n = S_n - 2(n+1) \text{ ومنه:}$$

التمرين الثاني :

النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  لواحقتها على الترتيب:  $z_A = 3 - 2i$  ،  $z_B = 3 + 2i$  ،  $z_C = 4i$  .  
1. أ- تعليم النقط  $A(3; -2)$  ،  $B(3; 2)$  و  $C(0; 4)$  :



ب- لدينا:  $z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = 4i$  ، و  $z_{\overline{OC}} = z_C - z_O = 4i$  ، ومنه:  $z_{\overline{AB}} = z_{\overline{OC}}$

أي:  $\overline{AB} = \overline{OC}$  وبالتالي الرباعي  $OABC$  متوازي أضلاع.

ج- النقطة  $\Omega$  مركز الرباعي  $OABC$  هي مرجح الجملة:

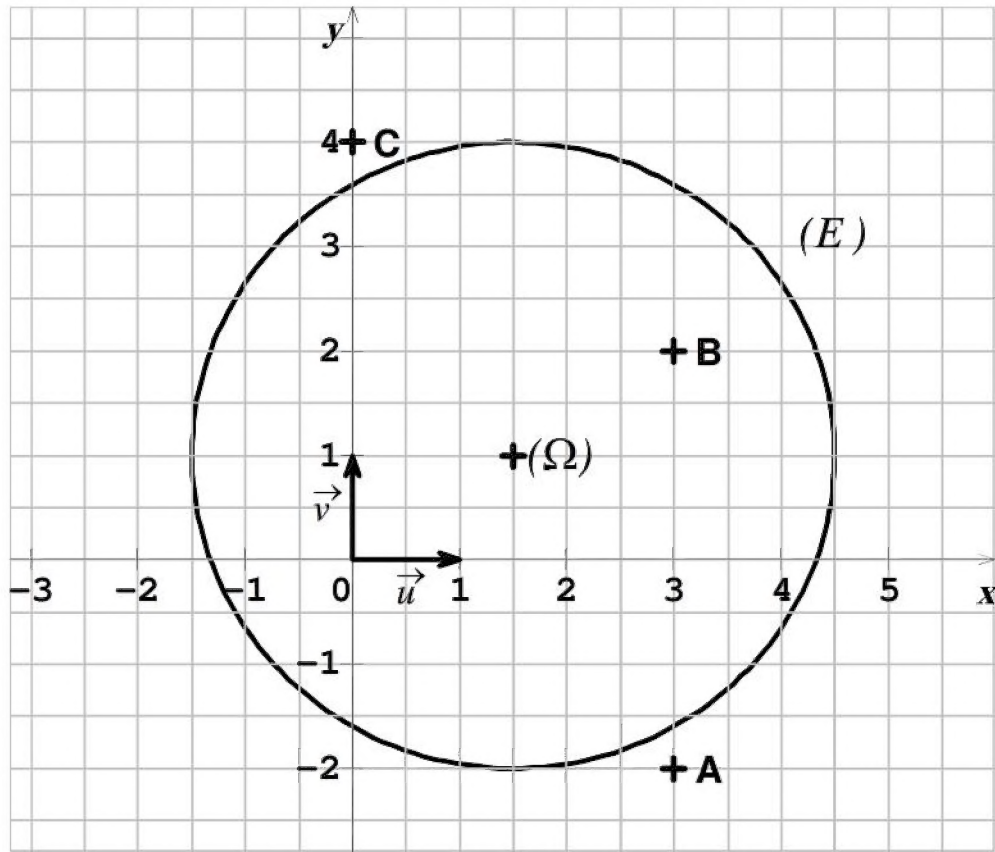
$$z_{\Omega} = \frac{z_O + z_A + z_B + z_C}{4} \text{ ، ومنه: } \{(O, 1); (A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$$

$$\text{بالحساب نجد } z_{\Omega} = \frac{3}{2} + i$$

$$2. \quad \|\overline{MO} + \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\| = 12 \text{ تكافئ } \|4\overline{M\Omega}\| = 12 \text{ ، ومنه: } 4M\Omega = 12$$

أي:  $M\Omega = 3$  . وبالتالي (  $E$  ) هي الدائرة ذات المركز  $\Omega$  ونصف القطر 3





3. أ- مميز المعادلة  $z^2 - 6z + 13 = 0$  هو  $\Delta = -16 = (4i)^2$ .

ومنه  $z_1 = \overline{z_0} = 3 + 2i = z_B$  و  $z_0 = \frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i = z_A$

ب-  $|z - z_0| = |z - z_1|$  تكافئ  $|z - z_A| = |z - z_B|$  أي  $AM = BM$  ومنه مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة  $[AB]$  ولكون  $A$  و  $B$  متناظرتين بالنسبة إلى محور الفواصل فإن مجموعة النقط هي حامل محور الفواصل.

التمرين الثالث :

1. أ- المستقيم  $(\Delta)$  هو مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  بحيث:  $\begin{cases} x = 2 + 1 \times t \\ y = 1 + (-4) \times t \\ z = 7 + (-1) \times t \end{cases}$  أي:

$$\text{حيث } t \text{ وسيط حقيقي. } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 7 - t \end{cases}$$

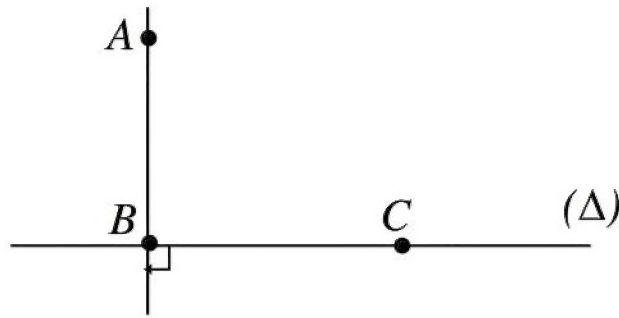
ب- بتعويض احداثيات النقطة  $C$  في التمثيل الوسيط لـ  $(\Delta)$  نجد:  $\begin{cases} 3 = 2 + t \\ -3 = 1 - 4t \\ 6 = 7 - t \end{cases}$

ومنه:  $\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$ . بما أن  $t$  وحيد فإن النقطة  $C$  تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta)$ .

جـ- لدينا:  $\overline{AB}(2;0;2)$  و  $\overline{BC}(1;-4;-1)$ .

بما أن:  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 2 \times 1 + 0 \times (-4) + 2 \times (-1) = 0$  فإن الشعاعين  $\overline{AB}$  و  $\overline{BC}$  متعامدان.

$$d(A;(\Delta)) = AB = \|\overline{AB}\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad \text{د -}$$



2. نعتبر النقطة  $M(2+t; 1-4t; 7-t)$  حيث  $t$  عدد حقيقي، ولتكن الدالة  $h$  المعرفة

على  $\mathbb{R}$  بـ:  $h(t) = AM$ .

$$\text{أ- لدينا: } h(t) = \sqrt{(2+t)^2 + (-4t)^2 + (2-t)^2} \quad \text{ومنه: } h(t) = \sqrt{18t^2 + 8}$$

$$\text{ب- من أجل كل عدد حقيقي } t \text{ لدينا: } h'(t) = \frac{18 \times 2t}{2\sqrt{18t^2 + 8}}$$

$$\text{ومنه: } h'(t) = \frac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}}$$

جـ- إشارة  $h'(t)$  هي من نفس إشارة  $18t$  ومنه جدول إشارة  $h'(t)$ :

$t$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$h'(t)$	$-$	$0$	$+$

تكون المسافة  $AM$  أصغر ما يمكن من أجل  $t = 0$ .

$$\text{من أجل } t = 0 \text{ يكون } h(0) = \sqrt{18 \times 0^2 + 8} \quad \text{أي: } h(0) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{نلاحظ أن: } d(A;(\Delta)) = h(0)$$

التمرين الرابع:

$$1. \text{ أ- لدينا: } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-ex - 1) = +\infty \text{ ومنه: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\text{ولدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ ولكون: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - e - \frac{1}{x} \right)$$



و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  نستنتج أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - e - \frac{1}{x} \right) = +\infty$

ومنه:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب- الدالة  $f$  تقبلا الاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا:  $f'(x) = e^x - e$   
إشارة  $f'(x)$ :

$f'(x) = 0$  تكافئ  $e^x = e$  أي  $x = 1$ .

$f'(x) < 0$  تكافئ  $e^x < e$  أي  $x < 1$ .

$f'(x) > 0$  تكافئ  $e^x > e$  أي  $x > 1$ .

وبالتالي الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; 1]$  و متزايدة تماما على المجال  $[1; +\infty[$ .  
ج- جدول تغيرات الدالة  $f$ :

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		$0$	
$f(x)$	$+\infty$	$-1$	$+\infty$

حيث:  $f(1) = e^1 - e - 1 = -1$

2. أ- بما أن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-ex - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  فإن المستقيم  $(\Delta)$  ذا

المعادلة  $y = -ex - 1$  مقارب للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $(-\infty)$ .

ب- معادلة المستقيم  $(T)$  من الشكل:  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$  ،

حيث:  $f(0) = e^0 - e \times 0 - 1 = 0$  و  $f'(0) = e^0 - e = 1 - e$  ومنه:  $(T): y = (1 - e)x$ .

ج- المجال  $[1, 75; 1, 76]$  محتوئ في المجال  $[1; +\infty[$  وبالتالي الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماما

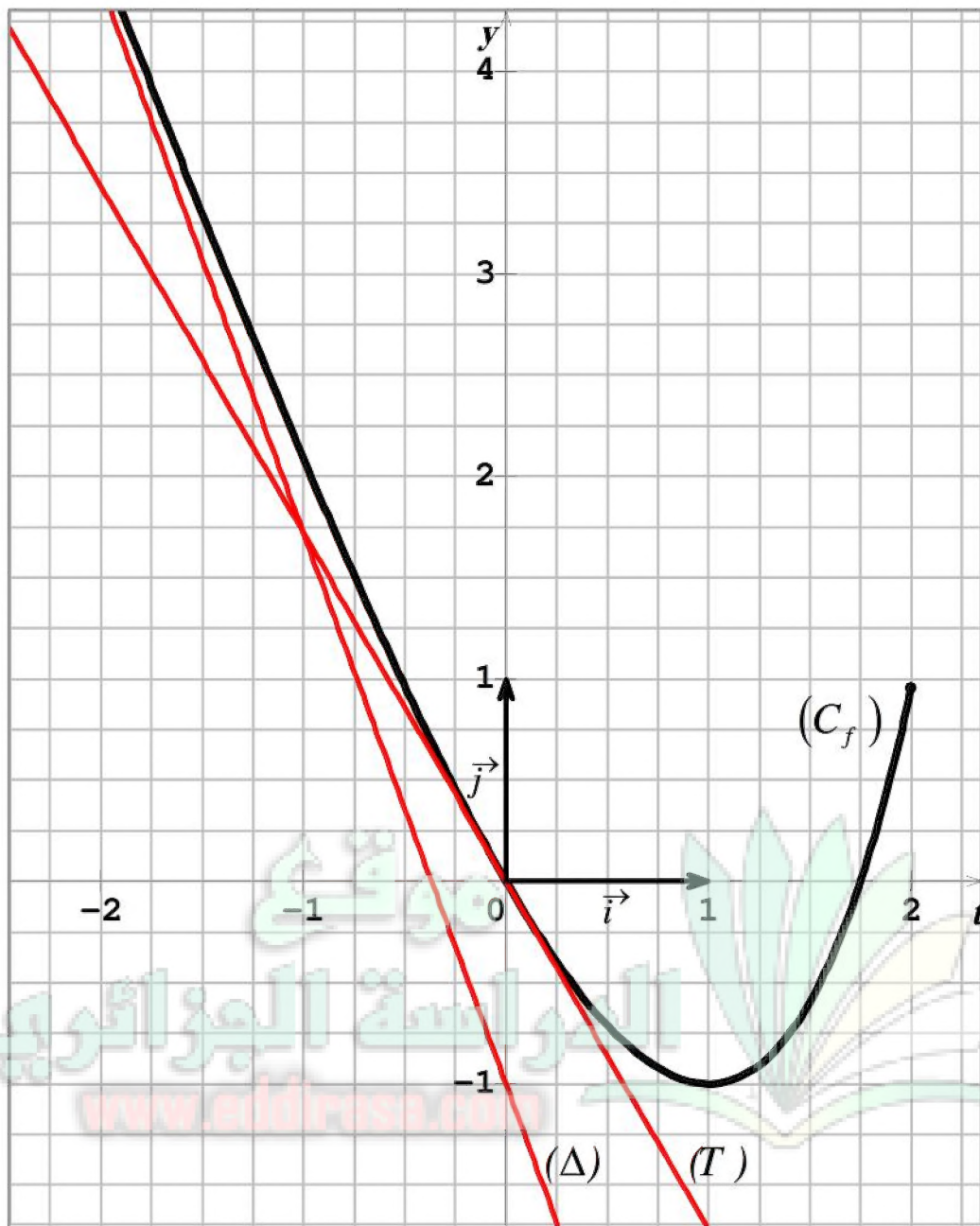
على المجال  $[1, 75; 1, 76]$  ولكون  $f(1, 75) \approx -0,002 < 0$  و  $f(1, 76) \approx 0,02 > 0$

نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $[1, 75; 1, 76]$  حلا

وحيدا  $\alpha$  ، أي يحقق  $f(\alpha) = 0$ .

د - رسم المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(T)$  ثم المنحنى  $(C_f)$  في المجال  $]-\infty; 2]$ :

$f(2) \approx 0,95$



3. أ. على المجال  $[0; \alpha]$  الدالة  $f$  سالبة ومنه:  $A(\alpha) = -\int_0^{\alpha} f(x) dx$ ، ومنه:

$$A(\alpha) = \left( 1 - e^{\alpha} + \frac{1}{2} e \alpha^2 + \alpha \right) (ua) \quad \text{، بالحساب نجد: } A(\alpha) = - \left[ e^x - \frac{e}{2} x^2 - x \right]_0^{\alpha}$$

بدلنا:  $f(\alpha) = 0$  أي  $e^{\alpha} - e\alpha - 1 = 0$  ومنه:  $e^{\alpha} = e\alpha + 1$ ، بالتعويض في  $A(\alpha)$

$$\text{نجد: } A(\alpha) = \left( 1 - e\alpha - 1 + \frac{1}{2} e \alpha^2 + \alpha \right) (ua) \text{، أي: } A(\alpha) = \left( \frac{1}{2} e \alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) ua$$